ТФКП. Коллоквиум

1. Последов-ти и ряды компл. чисел.

Опр. $\{z_n\}\to z \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\ge N\ |z_n-z|<\varepsilon$

Опр. $\{z_n\}$ - фундам-ая $\overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists N,\ \forall n\ge N,\ \forall p\in\mathbb{N}\ |z_{n+p}-z_n|<\varepsilon$

Т1. $\{z_n\}\to z \iff \{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y$

◄ ($\Leftarrow$) Пусть $z_n=x_n+iy_n$, $z=x+iy$ $\Rightarrow$ $\underbrace{|z-z_n|}_{\to 0} \Leftarrow\ \le \underbrace{|x-x_n|}_{\to 0}+\underbrace{|y-y_n|}_{\to 0}$ при $n\to\infty$

($\Rightarrow$) Т.к. $|x_n-x|\le|z_n-z|$ и $|y_n-y|\le|z_n-z|$, то при $n\to\infty$ ч.т.д. ►

Т2 (Кр. Коши) $\{z_n\}\to z\in\mathbb{C} \iff \{z_n\}$ - фунд.

◄ ($\Rightarrow$) $|z_{n+p}-z_n|=|z_{n+p}-z+z-z_n|\le|z_{n+p}-z|+|z_n-z|\to 0$ $n\to\infty$

($\Leftarrow$) $|x_n-x_{n+p}|\le\underbrace{|z_n-z_{n+p}|}_{\substack{\to 0\\ n\to\infty}}$, $|y_n-y_{n+p}|\le\underbrace{|z_n-z_{n+p}|}_{\substack{\to 0\\ n\to\infty}}$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сх. $\Rightarrow$ ч.т.д. ►

Теор. (арифм. опр.) Пусть: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n'=z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n''=z''$ $\xrightarrow{\text{Тогда:}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n'\pm z_n'')=z'\pm z''$

$\ldots,\ z''\ne 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n'}{z_n''}=\dfrac{z'}{z''}$

◄ Следует из Т.1 и теор. для посл-й действ. чисел ►

Опр $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сх. $\overset{def}{\iff} \exists\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$

Т.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сх $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сх.

◄ $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k+i\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ $\Rightarrow$ ч.т.д. ►

Т. (Критерий Коши) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сх. $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\ge N\ \forall p\in\mathbb{N}\ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

◄ Следует из вышенаписанного. ►

Т. (необ. усл. сх.) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ ◄ доказывается из вышенап-го ►

Т. Из абс. сх. ряда следует обычная сх.

◄ Учитывая, что $\sqrt{a^2+b^2}\ge a$ и $\ge b$ следует искомое утв. ►

2. Непрер-ть функ-и компл. перем-го

Опр. $f(z)$ непр. в $z_0\in E$ - пред. т. $\overset{def}{\iff} \exists\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

Т1. $f(z)$ непр. в т. $z_0=x_0+iy_0 \iff u(x,y), v(x,y)$ непр. в (x_0,y_0)
$\ \ = u(x,y)+iv(x,y)$

◄ Следует из Т. (о сущ-и предела $f(z)$ и действ., компл. частей) и опр. непр-ти ►

Т2 Пусть $f(z), g(z)$ непр. в т. z_0 $\Rightarrow$
1) $f(z)\pm g(z)$ непр. в z_0
2) $f(z)\cdot g(z)$ непр. в z_0
3) $g(z_0)\ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(z)}{g(z)}$ непр. в z_0

Пусть $f(z)$ опр. на E и непр. в $z_0\in E$
$F: \{w: w=f(z), z\in E\}$
$g(w)$ опр. на $G\supset F$ и непр. в $f(z_0)$ $\longrightarrow$ 4) композ. $f\circ g$ (суперпозиция) есть непр. ф. в z_0

◀ Док-во следует из Т.2 ▶

Опр $f(z)$ р/н на $E \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall z_1, z_2 \in E,\ |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

Теор.1 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ р.н. на $E \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ р.н. на E.

Теор.2 Пусть $f(z) \in C(E) \Rightarrow$ 1) $|f(z)|$ - огр. на E
2) $|f(z)|$ достигает своей верх. и нижн. гр.
3) $f(z)$ - р.н. на E

◀ Следует из Т.1 и соотв. утв. для u, v ▶

3. Необ. и дост. усл. диф-сти ф. компл. перем. в т.

Теор.1 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диф-ма в т. $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ дифф. в (x_0, y_0) и $u'_x = v'_y,\ u'_y = -v'_x$

◀ ($\Rightarrow$) $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$

$\Delta u + i\Delta v = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_2(1))(\Delta x + i\Delta y) \Rightarrow \begin{matrix} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x - \bar{o}_2(1)\Delta y \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta y + \bar{o}_2(1)\Delta x \end{matrix}$ (*)

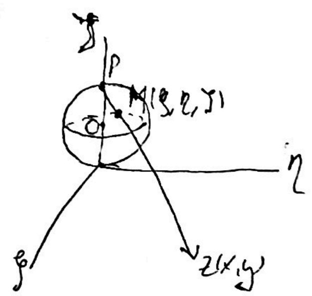
Т.к. $\Delta z \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ и при этом $u'_x = a,\ u'_y = -b$
$v'_x = b,\ v'_y = a$

($\Leftarrow$) Анал-но (*), только Δv : $\bar{o}_3, \bar{o}_4$ $\Rightarrow \Delta f = \Delta x(a+ib) + \Delta y(-b+ia) + \Delta x(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \Delta y(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)) =$
$= (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + \Delta x(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \Delta y(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib + \frac{\Delta x}{\Delta z}(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)) + \frac{\Delta y}{\Delta z}(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1))$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib = f'(z_0) = u'_x + iv'_x$. ▶

$|\Delta x| \le |\Delta z|,\ |\Delta y| \le |\Delta z|$

4. Стереогр. проекц. Римана



$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$, $\vec{PM} = (\xi, \eta, \zeta - 1)$, $\vec{Pz} = (x, y, -1)$, $\vec{PM} \parallel \vec{Pz} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} = \alpha \Rightarrow \alpha^2(x^2+y^2) + (\alpha - 1)^2 = -\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2(x^2+y^2) = (1-\alpha)\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+|z|^2} \Rightarrow \xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

5. Аналит. функ-и в т. и обл-ти

Опр Фун-я наз-ся аналит. в области, если она непр-но диф-ма в каждой т. области.

Опр Фун-я наз-ся аналит. в т., если она аналит. в нек. окр. этой т.

I. Если функ-я непрер. в области и в каждой т. области вып-ся условие Коши-Римана, то функ-я явл-ся аналит. в области

6. Опр-е и св-ва крив-го инт. от ф. компл. перем. в области

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ - спрямл-я кривая без т. самопересеч. и самоналегания.

Опр $\int\limits_{AB} f(z)|dz| = \lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(z_i^*)\, l(z_{i-1}, z_i)\right)$ - инт. 1 рода $\quad z_i^* \in \overset{\frown}{z_{i-1} z_i}$

Опр $\int\limits_{AB} f(z)dz = \lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(z_i^*)(z_i - z_{i-1})\right)$ - инт. 2 рода , свойства)

Т1 $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{AB} v(x,y)dx + u(x,y)dy$

◄ $\sum\limits_{i=1}^{n} f(z_i')(z_i - z_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n}[u(x_i',y_i')(x_i-x_{i-1}) - v(x_i',y_i')(y_i-y_{i-1})] + i\sum\limits_{i=1}^{n}[u(x_i',y_i')(y_i-y_{i-1}) + v(x_i',y_i')(x_i-x_{i-1})]$ ►

Т2 $\int\limits_{AB} f(z)|dz| = \int\limits_{AB} u(x,y)\,dl + i\int\limits_{AB} v(x,y)\,dl$

◄ Аналог-но ►

Т3 (необ. усл.) $\int\limits_{AB} f(z)dz\ \exists \Rightarrow |f(z)|$ огр. на $\overset{\frown}{AB}$.

Т.4 1) Пусть $\exists\int\limits_{AB} f(z)dz$, $\exists\int\limits_{AB} g(z)dz \Rightarrow \exists\int\limits_{AB}(\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha\int\limits_{AB} f(z)dz + \beta\int\limits_{AB} g(z)dz$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

2) Пусть $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}\cup\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{AC}\cap\overset{\frown}{CB} = \{C\}$, $\exists\int\limits_{AB} f(z)dz$ $\Big| \Rightarrow \exists\int\limits_{AC} f(z)dz$, $\int\limits_{CB} f(z)dz$ и $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AC} f(z)dz + \int\limits_{CB} f(z)dz$

3) наоборот 2)

4) $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$

5) $l = |\overset{\frown}{AB}|$, $|f(z)|\le M$, $z\in\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \left|\int\limits_{AB} f(z)dz\right| \le Ml$

◄ Следует из Т.1-Т2 и соотв. теорем для функ-й действ. перем. ►

7. Интегральная теор. Коши

Т.1 Пусть D-односв. область, $f(z)\in A(D)$, тогда $\forall$ контура $\Gamma\subset D$ $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

◄ $f'(z)\in C(D) \Rightarrow u,v\in C^1(D) \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-v) - \frac{\partial}{\partial y}(u)\right)dxdy + i\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u) - \frac{\partial}{\partial y}(v)\right)dxdy$

(ф-ла Грина)

$= 0$ ►

Сл-е Пусть D-односв., огр. область, ∂D-контур, $f(z)\in A(\overline{D}) \Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

8. Инт-ая фор-ла Коши

Т.1 Пусть: 1) D-область, $\Gamma\subset D$, $\operatorname{int}\Gamma(D_\Gamma)\in D$
2) $f(z)\in A(D)$

① $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0}$, $z_0\in D_\Gamma$ - инт-я фор-ла Коши

Интеграл Коши

◄

$z_0\in D_\Gamma \underset{D\text{-область}}{\Rightarrow} \exists\varepsilon>0 : \overline{U_\varepsilon(z_0)}\subset D_\Gamma$, $D_\varepsilon = D_\Gamma\setminus\{z \mid |z-z_0|\le\varepsilon\}$, D_ε-двусв. $\Rightarrow \int\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = 0$ (инт. т. Коши),

$\Leftrightarrow \int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = \int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = \left|\begin{matrix}\xi - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi}\\ d\xi = \varepsilon i e^{i\varphi}d\varphi\\ \varphi\in[0,2\pi]\end{matrix}\right| = \int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi \ominus$

$\ominus\ 2\pi i[u(x_0+\varepsilon\cos\varphi_1, y_0+\varepsilon\sin\varphi_1) + iv(x_0+\varepsilon\cos\varphi_2, y_0+\varepsilon\sin\varphi_2)]$, $\varphi_1,\varphi_2\in[0,2\pi] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi i f(z_0) \Rightarrow$ ч.т.д. ►

9. Интеграл типа Коши и его св-ва

Опр. Пусть Γ - жорданова, кус.-гл. кривая, необязат. замкн., $f(z) \in C(\Gamma)$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad z \notin \Gamma$$ - интеграл типа Коши

Т.1 $F(z) \in A(\mathbb{C}\setminus\Gamma)$ и $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

◀ Пусть $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma \Rightarrow \exists\delta > 0: \overline{U}_\delta(z) \cap \Gamma = \varnothing$, $\rho = \rho(\Gamma, \overline{U}_\delta(z)) > 0$, рассм. $\Delta z \mid |\Delta z| < \delta$.

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)\Delta z}{(\xi-z)^2(\xi-(z+\Delta z))}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{Ml}{\rho^3}|\Delta z|,$$

l - длина Γ, $M = \max\limits_{z\in\Gamma}|f(z)|$

$\Delta z \to 0$ ч.т.д.

По инд., пусть при $k = n$ это верно $\Rightarrow$

$$\frac{F^{(n)}(z+\Delta z) - F^{(n)}(z)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+2}} = \underbrace{\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\left[f(\xi)\cdot\frac{A(\xi,z,\Delta z)}{(\xi-z)^{n+2}\Delta z(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}}\right]d\xi}_{(*)}, \text{ где}$$

$$A(z,\xi,\Delta z) = (\xi-z)\left[(\xi-z)^{n+1} - ((\xi-z)-\Delta z)^{n+1}\right] - (n+1)\Delta z((\xi-z)-\Delta z)^{n+1} =$$

$$= (\xi-z)((\xi-z)^{n+1} - (\xi-z)^{n+1} + \ldots (-1)^n(\Delta z)^{n+1}) - (n+1)\Delta z(\xi-z)^{n+1} + \ldots (-1)^n(n+1)(\Delta z)^{n+2} = (\Delta z)^2 \cdot B(z,\xi,\Delta z)$$

B - фиксир. ст. многочлен $\Rightarrow$ $|\Delta z| \le \delta$ $|B|$ на Γ огр. $\Rightarrow \max\limits_{|\Delta z|\le\delta}|B| \le M_1$

$\Rightarrow |(*)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{MM_1 l}{\rho^{2n+3}}|\Delta z| \Rightarrow$ ч.т.д. ▶

10. Бесконечная дифф-ть анал. функ-й

Т. Пусть 1) $f(z) \in A(D)$

2) $z_0 \in D$

① $f(z)$ - бескон. дифф. фун-я и $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z_0-\xi|=\delta}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$.

◀ По инт. формуле Коши имеем: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z_0-\xi|=\delta}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$, $z \in U_\delta(z_0)$, где $\overline{U_\delta(z_0)} \subset D$, $\delta > 0$

$\Rightarrow$ из доказанной выше Т. ч.т.д. ▶

11. Теор. Коши-Адамара

Т. Пусть: 1) $R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ сх. в т. z_0

2) $R = \infty \Rightarrow$ — на всей $\mathbb{C}$

3) $R \in (0, \infty) \Rightarrow$ сх. абс. и равн. внутри круга $|z-z_0| < R$, вне замкн. круга расход.

◀ На сл. стр.

11 (продол-ие)

(1) $\exists \{a_{n_k}\}: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n_k]{|a_{n_k}||z-z_0|^{n_k}} = \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \cdot |z-z_0| \geq 1$ с нек номера

$\Rightarrow$ не вып. необход. условие ряда

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2|z-z_0|}$ начиная с некот. $n \geq N \Rightarrow |a_n(z-z_0)^n| \leq \frac{1 \cdot |z-z_0|^n}{2^n |z-z_0|^n} =$

$= \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ по призн. ср.

(3) Пусть $L = \frac{1}{R}$, тогда $L + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sqrt[n]{a_n}$ с некот. номера, кроме того пусть

$|z-z_0| < \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |z-z_0| < \frac{1}{L+\varepsilon}$

$|z-z_0| \quad \left|\frac{1}{L+\varepsilon}\right| \quad \left|\frac{1}{L}\right|$

Тогда $|a_n(z-z_0)^n| \leq \left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(L+\varepsilon)^n} = \underbrace{\left(\frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}\right)}_{q<1}^n$ – мажоранта

Пусть $|z-z_0| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: |z-z_0| > \frac{1}{L-\varepsilon}$:

$\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L-\varepsilon} \quad |z-z_0|$

$L-\varepsilon < \sqrt[n_k]{a_{n_k}} < L+\varepsilon$ с некот. номера

Т.е. $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > \cancel{(L-\varepsilon)^{n_k}} \cdot \frac{1}{\cancel{(L-\varepsilon)^{n_k}}} = 1 \Rightarrow$ не вып. необход. усл. сх-ти.

12. I и II Т. Вейерштрасса для функ. рядов

Т1 (I Т. Вейерштрасса) Пусть: 1) $f_n(z) \in A(D)\ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\forall K$-компакта $\subset D$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сх. равн. к $f(z)$ на K.

① $f(z) \in A(D)$

② $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, $z \in D$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сх. равн. внутри D

① $\forall z_0 \in D\ \exists \overline{U_\delta(z_0)} \subset D$, $\delta > 0$, $f_n(z) \underset{\text{инт.ф.К.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{f_n(\xi)d\xi}{\xi - z}$, $z \in U_\delta(z_0)$,

$|\xi-z_0|=\delta$ – компакт

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ сх. равн. на $\Big]$ $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\right)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$ (*)

Из 2) $\Rightarrow f(\xi) \in C(|\xi-z_0|=\delta) \Rightarrow$ (*) инт. типа Коши $\underset{\text{произв. то и } A(U_\delta(z_0))}{\Rightarrow}$ сх-д.

② Из условий $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\right)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\delta} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = f^{(k)}(z)$

③ Утв.: р.сх. на $\forall K \subset D$ (компакт) $\Leftrightarrow$ р.сх. $\forall$ круге $\subset D$

$\Rightarrow$ очевидно. $\Leftarrow$! Покроем $K \overset{\text{Л.Г.-Б.}}{\Rightarrow} \exists$ конечное подпокрытие $\Rightarrow N = \max\{N_1, \dots, N_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ р.сх. на K. $\downarrow$ сл.стр.

Пусть: $K=\{z:|z-z_0|\le r\}\subset D$, $\exists$ кр. $(0<r<r_1)$: $\{|z-z_0|\le r_1\}\subset D$. Пусть $z\in K$

$$\Rightarrow f^{(k)}(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z_0|=r_1}\frac{\left(f(\xi)-\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)\right)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}\le\frac{k!}{2\pi}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{k+1}}\max_{|\xi-z_0|=r_1}\left|f(\xi)-\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)\right|$$

Из 2) $\Rightarrow$ р.сх. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(k)}(z)$ к $f^{(k)}(z)$ на любом круге $\Rightarrow$ ч.т.д. ▶

Т.2 (ІІ Т. Вейерштрасса) Пусть: 1) D — огр. обл.

2) $f_n\in A(D)\cap C(\bar D)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сх. р. на ∂D

---

① $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сх. р. на $\bar D$ к $f(z)$

② $f(z)\in A(D)\cap C(\bar D)$

◀ Из 3) $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n\ge N$ $\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\partial D$: $\Big|\underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)}_{\in A(D)\cap C(\bar D)}\Big|<\varepsilon$ $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(*)<\varepsilon$ $\forall z\in\bar D$ $\Rightarrow$ ч.т.д. (①) $\Rightarrow$ $f(z)\in C(\bar D)$, по І Т. Вейерштрасса $f(z)\in A(D)$. ▶

принцип максим. мод. анал. ф.

св-ва р. сх. рядов

11. Гарм. ф. и их св-ва

Опр. $u(x,y)$ гарм. $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $u\in C^2(D)$, $\Delta u=0$

Т1. Пусть: 1) D — односв. обл.

2) $u(x,y)$ — гарм. ф. в D

---

① $\exists f(z)$: $f(z)\in A(D)$, $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$

◀ $v(x,y):=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u'_y dx+u'_x dy$, $(x,y),(x_0,y_0)\in D$. Пусть Γ — контур $\Rightarrow$ $\int_\Gamma -u'_y dx+u'_x dy=\iint_{D_\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_x)-\frac{\partial}{\partial y}(-u'_y)\right]\cdot$

$\cdot\, dx\,dy=0$ $\Rightarrow$ опр. $v(x,y)$ корректно. $dv(x,y)=-u'_y dx+u'_x dy$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} v'_x=-u'_y\\ v'_y=u'_x\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\Delta v=0$ $\Rightarrow$ v — гарм.

$\Rightarrow$ u и v удовл. усл. Коши-Римана $\Rightarrow$ $\underbrace{f(z)}_{=u(x,y)+iv(x,y)}\in A(D)$ ▶

Т2. Пусть: 1) $u(x,y)$ — гарм. ф. в D

---

① u — беск. дифф. в D

◀ Пусть $z_0\in D$ $\Rightarrow$ $\exists U_\varepsilon(z_0)\subset D$ — одн. обл. $\Rightarrow$ $\exists f(z)\in A(U_\varepsilon(z_0))$: $\operatorname{Re} f(z)=u$. $\operatorname{Re} f(z)$ б.д. $\Rightarrow$ u б.д. $\Rightarrow$ ч.т.д. (пр. $z_0\in D$) ▶

Т3. (ф-ла ср. зн. для гарм. ф.) Пусть: 1) $u(x,y)$ — гарм. в D

---

① $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,\,y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$, $(x_0,y_0)\in D$, r: $\{z:|z-z_0|\le r\}\subset D$

◀

↓ сл. стр.

<ТСЗ(пр-ие)

◄ Из Т.1) $\exists f(z)=u(x,y)+i v(x,y)$, $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{z-z_0}$, $z=z_0+re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $dz=rie^{i\varphi}d\varphi$

$\Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi$, учитывая $\Rightarrow$ ч.т.д. ►

14. Принцип максимума мод. для аналит. функ.

Т.1 Пусть:
1) $f(z)\in A(D)$
2) $f(z)\not\equiv const$

⊕ $\forall z\in D$ $|f(z)|<M:=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$

◄ Пусть $0<M<+\infty$. Д-во от противного. $\exists z_0\in D: |f(z_0)|=M$.

Утв. $\forall$окр. $\{z:|z-z_0|=r\}\subset D, r>0$ $|f(z)|=M$, $z\in$ окр.

◄ (От противного) $\exists z=z_0+re^{i\varphi_1}: |f(z)|<M$. Т.к. $|f(z)|\Big]_{z(\varphi)}$ непр. ф. $\Rightarrow$ окр. δ-окр. φ_1: $\forall\varphi\in$ этой окр. $|f(z_0+re^{i\varphi})|<M$.

Допустим $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_1+\delta$ $\Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi \Rightarrow |f(z_0)|=M\le\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\varphi_1}-''-+\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\delta}-''-+\int_{\varphi_1+\delta}^{2\pi}-''-\right)$ $<$

$<\frac{1}{2\pi}(M\varphi_1+\delta M+M(2\pi-\varphi_1-\delta))=M \Rightarrow \perp$ ►

Утв $\forall z\in D$ $|f(z)|=M$

◄ D-открытое связное мн. $\Rightarrow\exists$ непр. $\Gamma\subset D$ соед. z_0 и z, $\delta:=\rho(\Gamma,\partial D)=\inf\limits_{\substack{z_1\in\Gamma\\ z_2\in\partial D}}\rho(z_1,z_2)>0$, если $\delta=+\infty\Rightarrow\delta\in\mathbb{R}_+$ люб.
Покроем каждую т. кривой Γ откр. кругом рад. $\delta/3$ с центр. в этой т.
$\Rightarrow\exists$ кон. подпокрытие, пронумеруем от z_0 к z: $z_1,\dots,z_n$ центры кругов, или этом
$\{z:|z-z_i|\le\delta/3\}\cap\{z:|z-z_{i+1}|\le\delta/3\}\ne\emptyset$, $i=1,\dots,n-1$. $z_1\in$ кругу в у. z_0 с δ рад $\Rightarrow|f(z_1)|=M\ \dots\Rightarrow|f(z)|=M$ $\forall z\in D$.

Утв $f(z)=const$

◄ $|f(z)|^2=u^2+v^2\equiv M^2\Rightarrow\begin{cases}u\cdot u'_x+v\cdot v'_x=0\\ u\cdot u'_y+v\cdot v'_y=0\end{cases}\overset{\text{К-Р}}{\Rightarrow}\begin{cases}u\cdot u'_x-u\cdot u'_y=0\\ u\cdot u'_y+v\cdot u'_x=0\end{cases}\underset{u^2+v^2=M}{\Rightarrow}u'_x=u'_y=0\Rightarrow f(z)=const$ ($v=const$ аналог.)

$\perp$ ►

Сл-е.1 Пусть:
1) D-огр. обл.
2) $f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$

⊕ $|f(z)|$ дост. max на гран.

Сл-е.2 Пусть:
1) D-огр. обл.
2) $f_1(z), f_2(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$
3) $f_1(z)=f_2(z)$, $z\in\partial D$

⊕ $f_1(z)=f_2(z)$, $z\in\overline{D}$

Сл-е.3 Пусть:
1) D-огр. обл.
2) $f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$
3) $f(z)\ne0$ $\forall z\in(\overline{D})$

⊕ $\min|f(z)|$ дост. на гр.

15. Принцип максим. мод. гар. ф.

Т.1 Пусть:
1) $u(x,y)$ гарм. в D
2) $u(x,y)\not\equiv const$

⊕ $\forall(x,y)\in D: m<u(x,y)<M$, $m=\inf\limits_D u(x,y)$, $M=\sup\limits_D u(x,y)$

◄ Учитывая справедл. Т. о среднем значении для гарм. ф. и повторяя вышенаписанное док-во... ►

16. Степенные ряды, область сх. степ. ряда

Опр Степенной ряд $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z, z_0 \in \mathbb{C}$

Т.1 (Абеля) Пусть: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сх. в т. $z_1 \neq z_0$

① $\underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(*)}$ сх. абс. в $z: |z-z_0|<|z_1-z_0|$

◄ Т.к. ряд $(*)$ сх. $\Rightarrow \exists M>0: |a_n(z_1-z_0)^n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n(z-z_0)^n| \leq M \cdot q^n$, $q = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$ $\Rightarrow$ ч.т.д. ►

Опр радиус сх. ст. ряда — $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Т. Коши-Адамара (есть в предыд. пунктах)

17. Теор. Тейлора для аналит. ф.

Пусть: 1) $f(z) \in A(D)$

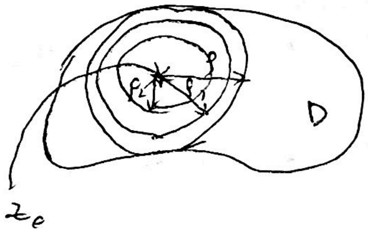
2) $z_0 \in D$

① $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in \{z: |z-z_0|<\rho\}$

② $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

③ Ряд в $f(z)$ сх. р. внутри круга.

◄



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad z: |z-z_0| \leq \rho_2.$$

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}_{t}{}^n$$

$|t| \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1 \Rightarrow$ есть р-сх. по $\xi: |\xi-z_0|=\rho_1$, $z \in \{z: |z-z_0| \leq \rho_2\}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right)}_{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}(z-z_0)^n$$

►

18. Нули аналит. функ-и

Опр z_0 — нуль кр. k $f(z) \in A(U_\varepsilon(z_0))$, если $f(z_0)=0, \ldots, f^{(k)}(z_0) \neq 0$

простой нуль, если $k=1$

19. Теорема Лиувилля

Пусть: 1) $f(z) \in A(\mathbb{C})$

2) $\exists \alpha>0, M>0: \forall z \in \mathbb{C} \ |f(z)| \leq M|z|^\alpha$

① $f(z)$ — многочлен, deg которого $\leq [\alpha]$

◄ $\alpha = m+r$, $0 \leq r < 1$, $[\alpha]=m$. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}$, $|f^{([\alpha]+1)}(z_0)| \leq \frac{([\alpha]+1)!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R(R+|z_0|)^\alpha}{R^{[\alpha]+2}} = \frac{([\alpha]+1)!\left(1+\frac{|z_0|}{R}\right)^\alpha}{R^{[\alpha]+1-\alpha}} \Rightarrow$

$$f^{([\alpha]+1)}(z_0) = \frac{([\alpha]+1)!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{[\alpha]+2}}$$

$\Rightarrow R \to +\infty$ $f^{([\alpha]+1)}(z_0) = 0$

$\Rightarrow$ ч.т.д. ►

№19 (продолжение)

Сл-е! Пусть: 1) $f(z) \in A(\mathbb{C})$

2) $\exists M > 0 : \forall z \in \mathbb{C} \ |f(z)| \le M$

⊕ $f(z) = const$

20. Т. Морера. Неопр. интеграл

Опр $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ – неопред. интеграл | Опр $\Phi(z)$ – первообр. для $f(z)$, если $\Phi(z) \in A(D)$ и $\Phi'(z) = f(z)$

Т.1 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$ – фор-ла Ньютона-Лейбн.

◄ $F(z) - \Phi(z) = \varphi(z) \in A(D) \Rightarrow \varphi'(z) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(z) = const$. Пусть $\varphi(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) \overset{К-Р}{\Rightarrow} u'_x = u'_y = v'_y = v'_x = 0$

т.е. $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$, $\varphi(z) = c_1 + ic_2 \Rightarrow \Phi(z) = F(z) + c = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + c \Rightarrow \Phi(z_0) = c$ или $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$ ►

Т.2 (Морера) Пусть: 1) D – однозв. обл.

2) $f(z) \in C(D)$

3) $\int_\Gamma f(z)dz = 0 \ \forall \Gamma \subset D$ – контур

⊕ $f(z) \in A(D)$

◄ $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$, $z_0 \in D, z \in D$, $\underbrace{\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)}_{} = \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z))d\xi}{\Delta z} \Rightarrow |*| \le \max_{[z, z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)|$

$\Rightarrow F'(z) = f(z)$. 2) $\Rightarrow F'(z) \in C(D) \Rightarrow F(z)$ – анал. ф. $\overset{(*)}{в}$ D $\Rightarrow f(z) \in A(D)$ (беск. много произв.) ►

21. Т. единств. анал. ф. Пусть:

1) $f(z), g(z) \in A(D)$

2) $\{z_n\} \in D$! $\exists z_0$ – пред. т. $\in D$

3) $f(z_n) = g(z_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

⊕ $f(z) \equiv g(z) \ \forall z \in D$

◄ 2) $\Rightarrow \exists \{z_{n_k}\} \to z_0$ $z'_n := z_{n_k}$. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, $|z - z_0| < \varepsilon$ в $U_\varepsilon(z_0) \subset D$ ($z_0 \in D$)

Из 3) $a_0 = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z'_n) = b_0 = g(z_0) = \lim_{n\to\infty} g(z'_n)$. $f(z) = a_0 + (z - z_0) f_1(z)$, $g(z) = b_0 + (z - z_0) g_1(z)$, $f_1, g_1 \in A(U_\varepsilon(z_0))$

$f_1(z'_n) = g_1(z'_n)$. Повторяя рассуж-я $\Rightarrow f(z) = g(z)$, $z \in U_\varepsilon(z_0)$

Пусть $z \in D$. Соединим z и z_0 непр. кр. $\Gamma \subset D$ – компакт. Покроем Γ кругами р. $\delta/3$, $\delta = \rho(\Gamma, \partial D)$ с центр. на Γ

п.Г.-Б.
$\Rightarrow \exists$ конечн. покр., круги пересек. $\Rightarrow f(z) = g(z) \ \forall z \in D$.

Сл.1 Пусть: 1) $f(z) \in A(D)$

2) $\{z_n\} \in D$

3) $z_0 \in D$ – пред.т. $\{z_n\}$

4) $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$

⊕ $f(z) \equiv 0$, $z \in D$

Сл.2 Пусть: 1) $f(z) \in A(D)$

2) $f(z) \not\equiv 0$

⊕ $\forall K \subset D$ $f(z)$ имеет не более конечн. числа компакт 0

Сл.3 Пусть: 1) $f(z) \in A(D)$

⊕ $f(z) \equiv 0 \lor$ в D $f(z)$ имеет не более счётного числа 0, которые могут накапливаться только к ∂.

Задачи ТФКП Коллоев.

№1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}$, $z=x+iy$, $g=1+\frac{z}{n}=\frac{1}{n}x+1+i\frac{y}{n}$

$\Rightarrow \arg g=\operatorname{arctg}\frac{y\cdot n}{n\cdot x+n} \Rightarrow g^n=\left(\frac{1}{n}\sqrt{\underbrace{(x+n)^2+y^2}_{x^2+2xn+y^2+n^2}}\right)^n e^{i\cdot n\operatorname{arctg}\frac{y}{x+n}}$,

$\Rightarrow g^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{n^2}+\frac{2x}{n}+1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2}\cdot e^{n i\operatorname{arctg}\frac{y}{x+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{n/2}\cdot e^{i\cancel{n}\frac{y}{\cancel{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}}=$

$=e^{\frac{2x}{2}}\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z$.

б) $\exists\, z_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, пусть $z_n=-1+\frac{(-1)^n}{n^2}i \Rightarrow z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-1$, но

$n=2k$: $\arg z_{2k}=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4n^2}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}\pi$

$n=2k-1$: $\arg z_{2k-1}=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\right)\to$

$\xrightarrow[k\to\infty]{}-\pi$. $\Rightarrow\perp$.

Ответ: нет.

Задача №2

а) $\lim\limits_{z\to z_0}(\sin z-\sin z_0)=2\lim\limits_{z\to z_0}\sin\frac{z-z_0}{2}\cos\frac{z+z_0}{2}$;

Непрер. $\sin z$ следует из диф-ти! $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=u(x,y)+iv(x,y) \ominus$

$\underset{z=x+iy}{\ominus}\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\frac{i}{2}(e^{-ix+y}-e^{ix-y})=\frac{i}{2}e^y(\cos x-i\sin x)-\frac{i}{2}e^{-y}(\cos x+i\sin x)$, учитывая, что

при $z\in\mathbb{R}$ $\sin z$ совпадает с обычным $\sin \Rightarrow \ominus\frac{\sin x}{2}(e^y+e^{-y})-i\frac{\cos x}{2}(e^{-y}-e^y)=$

$=\underbrace{\sin x\cdot \operatorname{ch}y}_{u(x,y)}+i\underbrace{\cos x\cdot\operatorname{sh}y}_{v(x,y)}$. Проверим условие К-Л: $u'_x=\cos x\operatorname{ch}y=v'_y=\cos x\operatorname{ch}y$

$u'_y=\sin x\operatorname{sh}y=-v'_x=-(-\sin x)\operatorname{sh}y$

$\Rightarrow$ ч.т.д.

С $\cos z$ анало-но.

б) $f(z)=\frac{1}{\sin z-5}\Rightarrow$ т. разрыва: $\sin z=5$, $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=5\Rightarrow$

$e^{2iz}-1=10ie^{iz}\Rightarrow t=e^{iz}\Rightarrow t^2-10it-1=0$, $D=-100+4=-96\Rightarrow t=\frac{10i\pm i\sqrt{96}}{2}=i(5\pm\sqrt{24})$

$\Rightarrow e^{iz}=i(5\pm\sqrt{24})\Rightarrow iz=\operatorname{Ln}(i(5\pm\sqrt{24}))\Rightarrow iz=\ln(5\pm\sqrt{24})+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z=-i\ln(5\pm\sqrt{24})+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

№3

$f(z)=z|z| = u(x,y)+iv(x,y) = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{x\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{y\sqrt{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

$\Rightarrow u'_x = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \cancel{2}x = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} v'_y = \frac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y)\neq(0,0)$

$u'_y = x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}y = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} -v'_x = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0)$

В т. $(0,0)$: $u'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(\Delta x^2+0)^{\frac12}-0}{\Delta x} = 0 \overset{?}{=} v'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y(0+\Delta y)^{\frac12}}{\Delta y} = 0$

$u'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y} = 0 \overset{?}{=} -v'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow$ ф. $f(z)$ дифф. в 0.

$\exists (x,y)\neq(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2=2y^2+x^2 \\ xy=0 \end{cases} \begin{cases} x=\pm y \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \perp$

Ответ: $f(z)$ дифф. только в $z=(0,0)$.

б) $f(z)=ch z$, $f'(z) = u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)$, $ch' z = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)' = \frac12\left((e^z)'+(e^{-z})'\right)$

$e^z = e^x\cos y + i\sin y\, e^x \Rightarrow (e^z)' = e^z$, $(e^{-z})' = -e^{-z}$ анал-но $\Rightarrow ch' z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = sh z$.

№4

а) $\xi = \frac{x}{1+|z|^2}$, $\eta = \frac{y}{1+|z|^2}$, $\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \Rightarrow$ Ответ: $\xi = \frac{x}{1+2x^2} = \eta$, $\zeta = \frac{2x^2}{1+2x^2}$

б) $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{y}{2}$, $\zeta = \frac12$

№5

а) $f(z) = x-iy$, она непр. по Т о Н и Д усл. непр., но $u'_x = 1 \neq v'_y = -1$

б) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, учитывая что ф. 1 и $\cos z$ дифф. и $\cos z\neq 0$ | z: $\cos z\neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos z}$ дифф-ма в т. $\{z : |\cos z\neq 0\}$ $\Leftrightarrow$ аналит.; $\cos z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0$

$\Rightarrow |t = e^{iz}| = t^2+1=0$, $t=i \Rightarrow e^{iz} = \pm i \Rightarrow iz = Ln(i) = \pm\frac{\pi}{2}i + 2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow z = \pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

№6

a) $\int\limits_{|z|=1} |z-1|dz = \left| \begin{matrix} z=e^{i\varphi} \\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi \end{matrix} \right| = i\int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}_{\underbrace{1-2\cos\varphi+1}_{\underbrace{2(1-\cos\varphi)}_{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}}}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$= 4i\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8i$

б) $f(z) \in C(\overline{K}_{\delta_0}(z_0)) \to \underbrace{\lim\limits_{\rho\to 0+0}\int\limits_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz}_{I^*} = 2\pi i f(z_0) \overset{(**)}{=}$

$I^* = \left| \begin{matrix} z-z_0=\rho\cdot e^{i\varphi} \\ dz=\rho i e^{i\varphi} \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\cancel{\rho e^{i\varphi}}}\cancel{\rho} i \cancel{e^{i\varphi}}d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi = i\Big[\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)d\varphi$

$+ i\int_0^{2\pi} v(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)d\varphi\Big] \overset{\text{т. о ср.}}{=} 2\pi i\,[u(x_0+\rho\cos\varphi_1, y_0+\rho\sin\varphi_1) + iv(x_0+\rho\cos\varphi_2, y_0+\rho\sin\varphi_2)]$

$\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$

$\to \rho\to 0+0 \overset{(**)}{=} 2\pi i f(z_0)$. ч.т.д.

№7

а) $z = tz_1 + (1-t)z_2,\ t\in[0,1]$, $\int_0^1 f(tz_1+(1-t)z_2)\,d(tz_1+(1-t)z_2) = (z_1-z_2)\int_0^1 f(tz_1+$
$+(1-t)z_2)dt$, $\left|\int_0^1 f(tz_1+(1-t)z_2)dt\right| = \left|\int_0^1 \operatorname{Re} f()dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f()dt\right| = \sqrt{\left(\int_0^1 \operatorname{Re} f()dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \operatorname{Im} f()dt\right)^2} \geq$
$\geq \left|\int_0^1 \underbrace{\operatorname{Re} f()dt}_{\geq M_0}\right| \geq M_0$ ч.т.д.

б) $\int\limits_{|z|=\rho} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{cases}$ $\quad I = \left| \begin{matrix} z=\rho\cdot e^{i\varphi} \\ dz = i\rho e^{i\varphi} \end{matrix} \right| = \rho^{n+1} i\left(\int_0^{2\pi}\cos(n+1)\varphi\,d\varphi + i\int_0^{2\pi}\sin(n+1)\varphi\,d\varphi\right)$

$\to \left| \begin{matrix} n=-1 \\ I = i\cdot(2\pi+0)=2\pi i \end{matrix} \right|$, $n\neq -1$: $I = \frac{\rho^{n+1}}{n+1} i\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(n+1)\varphi\,d((n+1)\varphi)}_{0} + i\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(n+1)\varphi\,d((n+1)\varphi)}_{\underbrace{1-\cos 2\pi}_{0}}\right) = 0$

ч.т.д.

№8

а) $\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^2-1} = \int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{2(z-1)}dz + \int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{2(z+1)}dz \underset{\text{инт. ф. Коши}}{=} 2\pi i\cdot\frac{1}{2}(e^1+e^{-1}) = 2\pi i\cdot \operatorname{ch} 1$

б) $\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, $|a|<r<|b|$, $n\in\mathbb{N}$ $= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{z-b}\right)^{(n-1)}\Big|_a = \frac{(-1)^{n+1}2\pi i}{\cancel{(n-1)!}}\cdot\cancel{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(a-b)^n} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2\pi i}{(a-b)^n}$

№9

а) $\int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi d\xi}{\xi - z}, \; |z| \neq 1 \underset{\text{инт. ф. Коши}}{\Rightarrow} = 2\pi i \cdot z$ б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\xi d\xi}{\xi - z} \; z \notin [-1,1] = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \frac{z}{\xi - z}\right) d\xi =$

$= 2 + z \cdot \ln(\xi - z)\Big|_{-1}^{1} = 2 + z \ln \frac{1-z}{-1-z}$.

№10

а) $f(z) = \underbrace{\int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi d\xi}{\xi - z}}_{(*)}, \; |z| \neq 1$ $f'(z) = \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi d\xi}{(\xi - z)^2}$ т.к. $\frac{1}{2\pi i} \cdot (*)$ – инт. типа Коши.

$f'(z) = \int\limits_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi - z} + \int\limits_{|\xi|=1} \frac{z d\xi}{(\xi - z)^2} = \left| \begin{matrix} \xi - z = e^{i\varphi} \\ d\xi = ie^{i\varphi} d\varphi \end{matrix} \right| = \underbrace{i \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{e^{i\varphi}} d\varphi}{\cancel{e^{i\varphi}}}}_{2\pi i} + \underbrace{iz \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}} d\varphi}_{\underbrace{\cancel{i} z \frac{e^{-i\varphi}}{(-\cancel{i})}\Big|_0^{2\pi}}_{\underbrace{z e^{-i\varphi}\Big|_{2\pi}^{0}}_{}}} = 2\pi i$

б) из. п. 9б: $f'(z) = \left(z \ln \frac{1-z}{-1-z}\right)' = \ln \frac{1-z}{-1-z} + z \cdot \frac{-1-z}{1-z} \cdot \frac{1+\cancel{z}+(1-\cancel{z})}{(-1-z)^2} = \ln \frac{1-z}{-1-z} + \frac{2z}{z^2-1}$.

№11

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$, $R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $a_n = \cos(in) = \operatorname{ch} n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\ln(e^n + e^{-n}) - \ln 2)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n + \ln(1+e^{-2n}) - \ln 2)} = e$

$\Rightarrow R = \frac{1}{e}$, при $z = R$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} \cdot e^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1+e^{-2n}}{2}}_{b_n}$. т.к. $|b_n| \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$, то ряд не сх.

$\Rightarrow$ сх. на границе нет

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$ $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = +\infty \Rightarrow$ сх. в любой т.

№13(а)

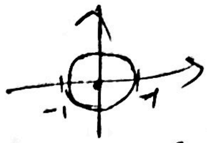
$u''_{xx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^2+y^2 - x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}$, $u''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}$ $\Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

Кроме того, она дважды непр. диф. $\Rightarrow$ она гарм-ая.

№

№14(а)

Пусть $f(z)=z \Rightarrow |f(z)|=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\in B_{\delta=1}(0)$



$\inf|f(z)|$ дост. в $(0,0)$, но $f(z)\in A(D)$ и не я-я const. Ответ: нет.

№15(а)

Т.к. ф-я $f(x,y)=e^x\cos y$ гар-на в $\overline{D}$ и $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $\min f(x,y)$ дост на границе.

Гар-ность: $f''_{xx}=e^x\cos y$, $f''_{yy}=e^x(-\cos y) \Rightarrow f''_{xx}+f''_{yy}=0$ и она дважды непр. диф.

№15(б)

Т.к. такая ф-я принимает max и min на границе $\Rightarrow$ она $\equiv 0$ в D

№16(а)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, $R=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0 \Rightarrow$ сх. только в т. $(0;0)$.

№16(б)

Пусть $L=\frac{1}{R}$, $R\neq 0 \Rightarrow \sqrt[k]{p_k}=\sqrt[k]{\underbrace{\frac{p_k}{p_{k-1}}}_{b_k}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}\ldots\frac{p_2}{p_1}\cdot p_1}$ Т.к. $\exists\lim\limits_{k\to\infty} b_k=L$

$p_k=|a_k|$, $k\in\mathbb{N}_0$

Чтобы док-ть необ-ое утв. нужно доказать, если $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=L$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{b_k\ldots b_1}=L$

Или если $\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\ln b_k}_{a_k}=\ln L \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}(\ln b_k+\ldots+\ln b_1)=\ln L$

Т.к. из того, что $\exists\lim\limits_{k\to\infty} a_k=A \Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}=A$ следует необходимое утв.

В случаях $L=0$ или $L=\infty$, можно перейти к $e^{\ldots}$ и по св-ву её непр. получить в оставшихся случаях.

№17(а)

$\sin^2 z=\dfrac{1-\cos 2z}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{2^{2n-1}}}{\cancel{(2n)!}}\cdot\dfrac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n-1}\cdot 2^2}=+\infty$

$\Rightarrow R=+\infty \Rightarrow$ сх. везде.

из №16(б)

5(7)(б)

$$f(z) = e^z \sin z = e^z \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{z(i+1)} - \frac{1}{2i} e^{z(1-i)} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i+1)^k - (1-i)^k}{k!} z^k$$

$$f'(z) = e^z(\sin z - \cos z), \quad f''(z) = 2e^z \cos z$$

$$f^{(3)}(z) = 2e^z(\cos z - \sin z), \quad f^{(4)}(z) = -4e^z \sin z$$

$$f^{(5)}(z) = 4e^z(-\sin z - \cos z), \quad f^{(6)}(z) = -8e^z \cos z$$

...

Коэф-ы:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	$\frac{1}{1!}$	$\frac{2}{2!}$	$\frac{2}{3!}$	$\frac{0}{4!}$	$\frac{-4}{5!}$	$\frac{-8}{6!}$	$\frac{-8}{7!}$	$\frac{0}{8!}$	$\frac{16}{9!}$	$\frac{32}{10!}$	$\frac{32}{11!}$	$\frac{0}{12!}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{2^{2k+1}}}{(4k+2)!} \cdot \frac{(4k+2)!\,(4k+3)(4k+4)(4k+5)(4k+6)}{\cancel{2^{2k+1}} \cdot 2^2} = \infty \Rightarrow \text{сх. в л.т.}$$

№18а

Нет, т.к. из аналит. следует непрер., а $f(z)$ не явл-ся непр. в $(0;0)$: т.е. $\nexists \lim\limits_{z\to(0,0)} f(z)$, т.к. $\exists$ 2 под-ти к-ся к разным пределам 1 и 0 соотв-но.

№19б

По условию $a_{-n} \neq 0$ и $a_{-m} \neq 0$ $\Rightarrow$ если $n \neq m$, то для $f(z)+g(z)$ z_0 полюс порядка $\max(n,m)$, если $m=n$ $\Rightarrow$ z_0 м.б. как устр. особой т, так и полюсом порядка $\leq m$.

№19а

Пусть $f(z)=e^{e^z}$ $\Rightarrow$ при $|z|=r$ $|f(z)|=e^r > z^\alpha$, начиная с опр. r.

№14б

Пусть $\Psi(z)=f(z)-z^n$ $\Rightarrow$ $|\Psi(z)| \leq |z|^{n-1}\cdot|a_1|+\ldots+|a_n|$,

$|\Psi(z_0)| \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_k| > 0$, если $|\Psi(z_0)|=0$, $\Rightarrow$ $\max\limits^{\text{внут.}}|\Psi(z_0)|=0$
$\Downarrow$
$|z_0|=1$

для $z_0: |z_0|=1$ $\quad |z|\leq 1$

$\Rightarrow \Psi(z)=\text{const}=0$

учитывая, что $f(z)=z^n$, если $f(z) != z^n$ $\Rightarrow$ приведённые рас-е приводят к противор-ию, что $|\Psi(z_0)|=0$, $z_0: |z_0|=1$ $\Leftrightarrow$ $\exists z_0: |\Psi(z_0)|>0$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_k|>0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\exists$ ненул. коэф. a_j $\Rightarrow$ ч.т.д.

№20а

$I=\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z$ по опр. Пусть $z=|z|e^{i\arg z}$ $\Rightarrow$ $I=\ln z \overset{\ln}{=} |z| + i\arg z$

№21а

Пусть